10 - Дәріс

Тақырыбы: **Жоғары ретті дербес туындылар мен толық дифференциалдар. Көп айнымалы функцияның экстремумы.**

1. Жоғары ретті дербес туындылар. $z = f(x,y)$ функциясының $(x,y) \in G$ нүктелерінде дербес туындылары:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$$

бар болса, онда бұл туындыларды G (жиынында берілген жаңа функциялар деп қарастыруға болады.

Осы функциялардан алынған дербес туындылар $f(x,y)$ функциясының **екінші ретті дербес туындылары** деп келесі түрде белгіленеді (олар төртеу):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx} = z''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = z''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = z''_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy} = z''_{yy}.$$

f''_{xy} және f''_{yx} - туындылары **аралас** деп аталады; оның біріншісі алдымен x, содан соң y бойынша, ал екіншісі, керісінше, алдымен y, содан соң x бойынша дифференциалдау арқылы алынған.

Егер $(x,y) \in G$ нүктелерінде екінші ретті туындылар (барлығы немесе қандай да біреуі) бар болса, онда үшінші ретті туындылардың бар болуы туралы сұрақ туады.

Жалпы, n **-ші ретті дербес туынды** деп қандай да бір $(n-1)$-ші ретті туындының кез келген бір айнымалысы бойынша дербес туындысын айтады. Мысалы,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ **- бірінші ретті дербес** туындылар, ал f -функциясының өзін **нөлінші ретті дербес туынды** деп атайды.

Дифференциалдау нәтижесі дифференциалдау ретіне тәуелді ме деген сұрақ туы мүмкін.

Теорема ***(аралас туындылар туралы).*** *Функция* $z = f(x,y)$ *пен оның дербес туындылары* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$P_0(x_0, y_0)$ *нүктесінің қандай да бір маңайында анықталсын. Егер* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *және* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

P_0 *нүктесінде үзіліссіз болса, онда*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \tag{1}$$

яғни, дифференциалдау нәтижесі дифференциалдау ретіне тәуелді болмайды.

Ескерту. *Егер үзіліссіздік шарты орындалмаса, онда* P_0 *нүктесінде аралас туындылар өзара тең болмауы да мүмкін.*

2. Жоғары ретті дифференциал. $z = f(x,y)$ функциясының бірінші ретті дербес туындылары $P(x,y) \in G$ нүктесінде үзіліссіз болсын. Онда оның толық дифференциалы

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y), dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (2)$$

түрінде жазылады. Мұнда dz тәуелсіз айнымалы x пен y-ке және олардың дифференциалына dx, dy тәуелді. *P(x,y)* нүктесінде үзіліссіз дербес туындылары болатын кез келген $u = u(x, y)$ және $v = v(x, y)$ функциялары үшін келесі қасиеттер орындалады:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(u \cdot v) = udv + vdu,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \quad v \neq 0,$$

сонымен бірге, жақшадағы функциялардың дербес туындылары *P(x,y)* нүктесінде үзіліссіз болады.

Енді $z = f(x, y)$ функциясының **екінші ретті дербес туындылары** үзіліссіз болсын. Анықтама бойынша оның **екінші ретті дифференциалы** деп бірінші ретті dz толық дифференциалдың толық дифференциалын айтады және мұнда dx пен dy тұрақты, яғни x пен y (ке тәуелсіз деп саналады. Сонымен, осы айтқандарды пайдалансақ:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \qquad (3)$$

болады.

Дәл осылайша

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3 \qquad (4)$$

Математикалық индукция әдісін қолданып, n-ші ретті дифференциалды жазуға болады. Оны біз символ арқылы жазайық:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z. \qquad (5)$$

Біз мұнда алдымен өрнекті n-ші дәрежеге дәрежелейміз де, содан соң ∂^n символының астына z жазамыз.